平成 27 年度　予想問題

＜日本大学 医学部＞

数　　学

（75 分）

東大螢雪会

1

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において連立不等式

$$\begin{cases} \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 1 > 0 \\ \sin\theta + \cos\theta > 0 \end{cases}$$

の解は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi < \theta < \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\pi$ である。

(2)　赤玉３個，白玉２個，青玉１個，合計６個の玉が入っている袋から１個の玉を取り出して元に戻す試行を４回行うとき，赤玉が２回，白玉が１回，青玉が１回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}$ である。

(3)　x^{30} を x^3-1 で割った余りは $\boxed{7}$ である。

(4)　円 $C: x^2+y^2=4$ と直線 $L: ax-2\sqrt{3}y-a+6=0$ との２つの共有点を P, Q とする。

C 上に適当な点 R をとり三角形 PQR が正三角形となるのは, $a=\boxed{8}$ のときである。

(5)　n を整数とし， $F(x)=x(x+1)(x+5)$ とする。

x の方程式 $F(x)=F(n)$ が異なる３つの実数解をもつとき，整数 n の取りうる値の範囲は $-\boxed{9} \leqq n \leqq \boxed{10}$ である。

(6)　$-1<x<y$ として，連立方程式

$$\begin{cases} \log_{10}(xy+x+y+1)=1 \\ \log_{10}(x+1)\cdot\log_{10}(y+1)=-2 \end{cases}$$

の解は， $x=-\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}\,\boxed{13}}$ ， $y=\boxed{14}\,\boxed{15}$ である。

(7)

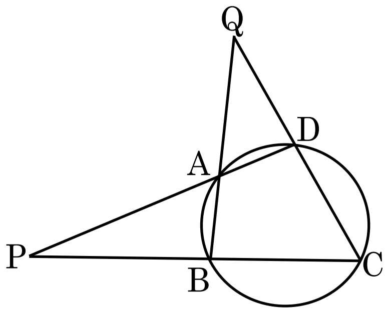
$$\begin{cases} 13x-8y=1 \\ |x| \leqq 100 \\ |y| \leqq 100 \end{cases}$$ を満たす整数の組(x, y)は

$\boxed{16}\boxed{17}$個存在する。

(8)　図の円に内接する四角形ABCDにおいて，直線DAと直線CBとの交点をP，直線BAと直線CDとの交点をQとする。

QD＝12，QA＝14，CB＝13，PB＝15のとき

AB＝$\boxed{18}\boxed{19}$，CD＝$\boxed{20}\boxed{21}$である。



$\boxed{2}$

三角形ABCにおいて，AB$=1$，BC$=2$，CA$=\sqrt{3}$とする。正三角形PQRを，辺PQ上に点Aが，辺QR上に点Bが，辺RP上に点Cがあるように作る。

(1)　$\angle$PAC$=\theta$として，CP，CRの長さをそれぞれθで表しなさい。

(2)　正三角形PQRの面積$S(\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$を$\theta$で表しなさい。

(3)　$S(\theta)$の最大値と最小値を求めなさい。

$\boxed{3}$

(1)　θ が π の偶数倍でないとき

$$\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$ を簡単にしなさい。

(2)　n を正の整数とする。

$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi$ を計算して $\tan\frac{\pi}{4n}$ を用いて表しなさい。

$\boxed{4}$

nを正の整数とし, 曲線 $y = e^{-x}\sin nx\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積を S_n とする。

(1)　$\int (e^{ax}\sin x)\,dx$ を求めなさい。

(2)　$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t\, dt$ とする。I_1 の値と $\lim_{n\to\infty} I_1$ の値を求めなさい。

(3)　$\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めなさい。