(1) $f(x)=x^2(5x-2)$ とおくと，$S_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

したがって，$0<x\leqq 1$ において考えればよい。

$$f(x)=5x^3-2x^2$$

$$f'(x)=x(15x-4)$$

よって，$0<x<\dfrac{4}{15}$ において，$f(x)$ は減少し，$\dfrac{4}{15}<x<1$ において，$f(x)$ は増加する。

そして，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{4}{15}<\dfrac{1}{3}$ である。

$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=S(4)=-\dfrac{3}{64}$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=S(3)=-\dfrac{1}{27}$ であり，$-\dfrac{1}{27}>-\dfrac{3}{64}$ であるから，S_n を最小と

する自然数 n は 4 である。

(2) $S_{n+1}-S_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)-f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a_{n+1}$ である。

(1) より $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 1$ では $f(x)$ は増加して，$a_1=S(1)=3$ であるから，$a_2<0$，$a_3<0$，$a_4<0$

また，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}$ では $f(x)$ は減少するから

$n\geqq 4$ では $S_{n+1}>S_n$ つまり，$a_5>0$，$a_6>0$，$a_7>0$，$a_8>0$

以上から，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}|\,a_n\,|&=a_1-(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)\\&=S_8-2(S_4-a_1)\\&=\frac{1}{8^2}\left(\frac{5}{8}-2\right)-2\left(-\frac{3}{64}\right)+2\times 3\\&=\frac{3109}{512}\end{aligned}$$