$K:(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4^2$

球面 K の中心を M とすると，M(1 , 1 , 0) である。

(1) K と α の交わりの円の中心 C の座標を $(x\,,\,y\,,\,z)$ とする。MC はベクトル $\vec{a}=(1\,,\,2\,,\,2)$ に平行であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=k\vec{a}=(k\,,\,2k\,,\,2k)\ (k\text{ は実定数})$$

$\therefore\ x=k+1\,,\,y=2k+1\,,\,z=2k$

K と α が共有点をもつ条件は，$\mathrm{MC}\leqq 4$

$$k^2+(2k)^2+(2k)^2\leqq 4^2$$

$$-\frac{4}{3}\leqq k\leqq\frac{4}{3}$$

したがって，

$$-\frac{1}{3}\leqq x\leqq\frac{7}{3}$$

となるから，C の軌跡は直線 $x-1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{2}$ の $-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}$ の部分である。

(2) K と α の交わりの円の面積が 4π であり，その半径は 2 であるから，

$$\mathrm{MC}^2=4^2-2^2=12$$

MC はベクトル $\vec{a}=(1\,,\,2\,,\,2)$ に平行であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=k\vec{a}=(t\,,\,2t\,,\,2t)\ (t\text{ は実定数})$$

したがって，$\mathrm{MC}^2=t^2+(2t)^2+(2t)^2=12$

$$t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき，C の座標は $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1\,,\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1\,,\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

α の方程式は

$$\left\{x-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)\right\}+2\left\{y-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+1\right)\right\}+2\left(z-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=0$$

$$3x+6y+6z=9+10\sqrt{3}$$

$t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき，C の座標は $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1\,,\,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1\,,\,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ となり，同様にして α の方程式は

$$3x+6y+6z=9-10\sqrt{3}$$

以上から，求める α の方程式は

$$3x+6y+6z=9\pm\sqrt{3}$$