$f(a)$ は $a=2^pM$ に含まれる約数 2 の個数に等しい。実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

(1) 1 から 50 までの自然数のうち

$p=1$ となるものは $\left[\dfrac{50}{2}\right]-\left[\dfrac{50}{2^2}\right]$ 個

$p=2$ となるものは $\left[\dfrac{50}{2^2}\right]-\left[\dfrac{50}{2^3}\right]$ 個

$p=3$ となるものは $\left[\dfrac{50}{2^3}\right]-\left[\dfrac{50}{2^4}\right]$ 個

$p=4$ となるものは $\left[\dfrac{50}{2^4}\right]-\left[\dfrac{50}{2^5}\right]$ 個

$p=5$ となるものは $\left[\dfrac{50}{2^5}\right]-\left[\dfrac{50}{2^6}\right]=\left[\dfrac{50}{2^5}\right]$ 個

$p \geqq 6$ となるものはない

よって，

$$\begin{aligned}
S_{50} &= 1\times\left(\left[\frac{50}{2}\right]-\left[\frac{50}{2^2}\right]\right)+2\times\left(\left[\frac{50}{2^2}\right]-\left[\frac{50}{2^3}\right]\right)+3\times\left(\left[\frac{50}{2^3}\right]-\left[\frac{50}{2^4}\right]\right)+4\times\left(\left[\frac{50}{2^4}\right]-\left[\frac{50}{2^5}\right]\right)\\
&\quad +5\times\left[\frac{50}{2^5}\right]\\
&=\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{2^2}\right]+\left[\frac{50}{2^3}\right]+\left[\frac{50}{2^4}\right]+\left[\frac{50}{2^5}\right]\\
&=25+12+6+3+1\\
&=47
\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に考えて，

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= \left[\frac{2^n}{2}\right]+\left[\frac{2^n}{2^2}\right]+\left[\frac{2^n}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^n}{2^{n-1}}\right]+\left[\frac{2^n}{2^n}\right]\\
&=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1\\
&=2^n-1
\end{aligned}$$

(3) 2 以上の自然数 m は，適当な自然数 α を用いて

$$2^\alpha \leqq m \leqq 2^{\alpha+1}-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

(2) と同様に考えて

$$S_m=\sum_{i=1}^{\alpha}\left[\frac{m}{2^i}\right]$$

一般に，実数 x に対して不等式 $[x]$ に対して不等式 $[x]\leqq x$ が成り立つから

$$\left[\frac{m}{2^i}\right]\leqq\frac{m}{2^i}\ \ (i=1,2,\cdots,\alpha)$$

よって

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\left[\frac{m}{2^i}\right] \leqq \sum_{i=1}^{\alpha}\frac{m}{2^i}$$

つまり

$$S_m \leqq m\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)$$

$$\therefore S_m < m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

次に①より，

$$m \leqq 2^{\alpha+1}-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

(2) の結果から，

$$2^\alpha = S_{2^\alpha}+1$$

③に代入して，$m \leqq 2(S_{2^\alpha}+1)-1$

$$\frac{m-1}{2} \leqq S_{2^\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

①より $2^\alpha \leqq m$ であるから，

$$S_{2^\alpha} \leqq S_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

④，⑤から，

$$\frac{m-1}{2} \leqq S_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

②，⑥から，$\dfrac{m-1}{2} \leqq S_m < m$