

すべての自然数 a は、適当な 0 以上の整数 p と奇数 M とを用いて、 $a = 2^p M$ のように表される。このとき、 $f(a) = p$ と定めて、

$$S_n = \sum_{p=1}^n f(p)$$

とする。

(1) S_{50} を求めよ。

(2) 自然数 n に対して S_{2^n} を求めよ。

(3) 2 以上の自然数 m は、適当な自然数 α を用いると、

$$2^\alpha \leq m \leq 2^{\alpha+1} - 1$$

を満たす。このことを用いて、不等式

$$\frac{\alpha - 1}{2} \leq S_\alpha < \alpha$$

が成り立つことを示せ。