(1) $f_n(x) = x^n e^{-x}$

$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$

よって，$f_n(x)$ は $0 < x < n$ で $f_n'(x) > 0$ となり増加，$n < x$ で $f_n'(x) < 0$ となり減少となるから，$x = n$ のとき，最大値

$$M_n = f_n(n) = n^n e^{-n}$$

をとる。

また，$f_n(x) = x^n e^{-x} = \dfrac{1}{x} \times f_{n+1}(x)$ となるから，$f_n(x) \leqq \dfrac{1}{x} \times M_{n+1}$

つまり

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{1}{x} \times M_{n+1}$$

が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times M_{n+1} = M_{n+1} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n(x) = n!$